2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $(2n+5)\, u_{n+1} = (2n+2)\, u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = \dfrac{2^{2n+2}\, n!\, (n+1)!}{(2n+3)!}$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\sqrt{1-x}\; dx$.

EXERCICE N°3 : 35' 6 points

Soient les suites I et J définies par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^2 (1-t^2)^n\, dt$, $n \in IN^*$.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_{n+1} = I_n - J_n$. Montrer que pour tout $n \in IN$, $J_n = \dfrac{1}{2(n+1)}\, I_{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3}\, I_n$.

2°) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n = \dfrac{(2^n\, n!)^2}{(2n+1)!} = 2^n\, \dfrac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots (2n+1)}$.

3°) Soit la suite u définie sur IN par : $u_n = 1 + \dfrac{1!}{1 \times 3} + \dfrac{2!}{1 \times 3 \times 5} + \cdots + \dfrac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{1 - \left((1-t^2)/2\right)^{n+1}}{1+t^2}\, dt$.

b) On pose $v_n = 2I - u_n$ où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$. Exprimer v_n à l'aide d'une intégrale.

c) Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le \dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \le 1$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE N°4 : 25' 4 points

Un solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation :

$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ autour de l'axe des abscisses.

Le but de cet exercice est de calculer le volume de ce solide.

1) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}} \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\, dt$.

a) Montrer que F est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer F'.

2) Exprimer $F(x)$ en fonction de x, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Conclure.

Qarray.tn - Aora Blech- Qarray.tn